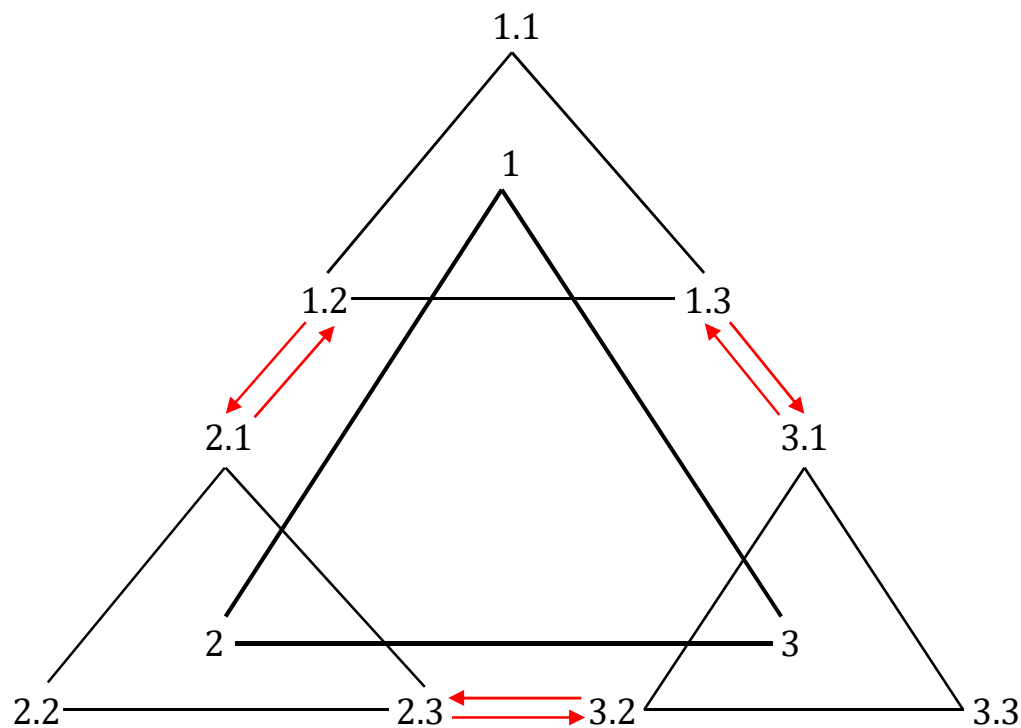


Prof. Dr. Alfred Toth

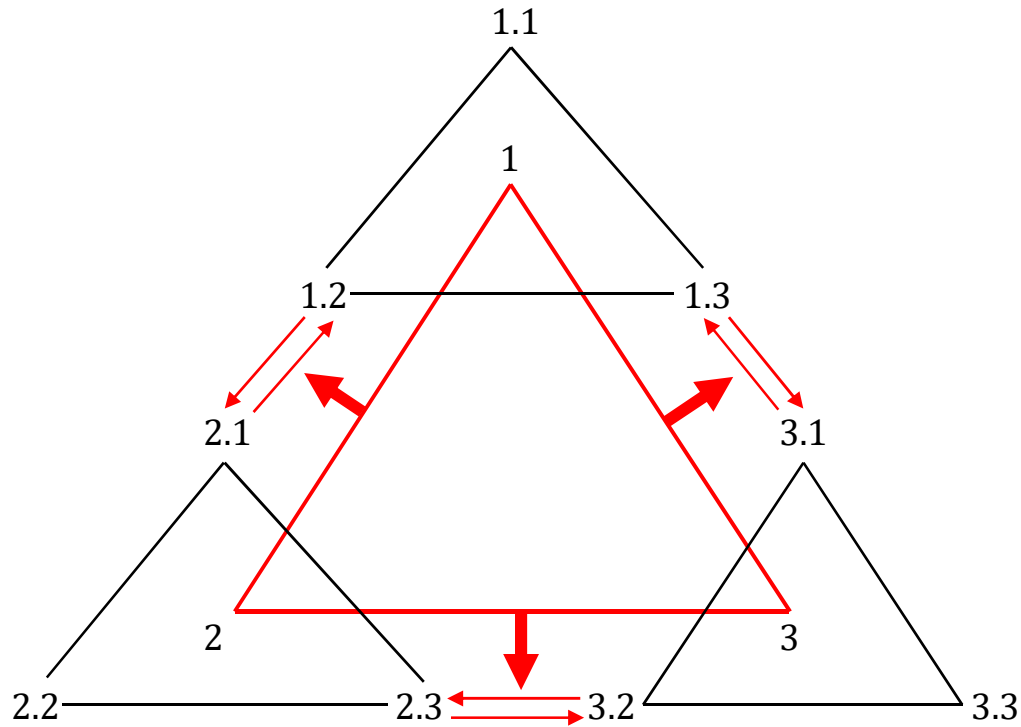
n-kategoriale Semiotik

1. Wir gehen aus von dem vollständigen Graphen der „Zeichenbezüge“ (vgl. Toth 2019a, b) der triadisch-trichotomischen Zeichenrelation, wie er von Bense (1967, S. 17), allerdings auf abweichende Weise, eingeführt worden war.

In Toth (2019c) wurde gezeigt, daß man das „Schema der Zeichenbezüge“ so anordnen kann, daß an je 1 Ecke der drei äußeren Dreiecksgraphen ein Paar zueinander dualer Relationen zu stehen kommt. Diese sind beim triadisch-trichotomischen Zeichenmodell die drei Paare $(1.2) \times (2.1)$, $(1.3) \times (3.1)$ und $(2.3) \times (3.2)$.



Diese als Austauschrelationen der Form $\Leftrightarrow$ darstellbaren dualen Paare sorgen also für die Interrelationen der trichotomischen Differenzierung des triadischen Hauptgraphen, d.h. wir bekommen hier einen in der Semiotik bisher unbekannten Typus von Semiose:



$$(1 \rightarrow 2) \rightarrow (1.2 \rightrightarrows 2.1)$$

$$(1 \rightarrow 3) \rightarrow (1.3 \rightrightarrows 3.1)$$

$$(2 \rightarrow 3) \rightarrow (2.3 \rightrightarrows 3.2)$$

Gemäß der Theorie der Higher-Dimensional Categories wird eine n-Kategorie wie folgt definiert (vgl. Cheng/Lauda 2004, S. 2)

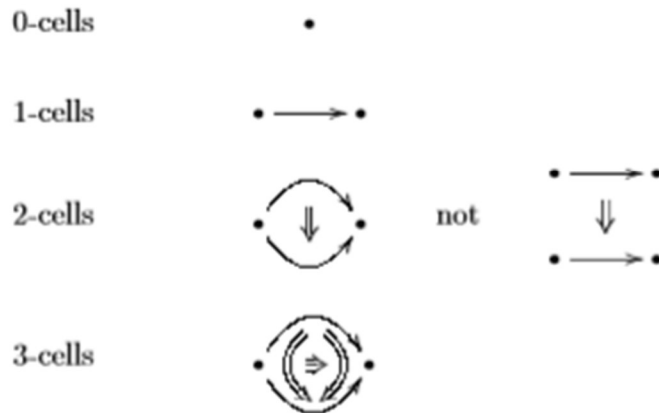
Definition 1-n A strict n -category is given by

$$i) \text{ DATA: a diagram } C_n \xrightleftharpoons[t_n]{s_n} C_{n-1} \xrightleftharpoons[t_{n-1}]{s_{n-1}} \cdots \xrightleftharpoons[t_2]{s_2} C_1 \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} C_0 \text{ in } \mathbf{Set}$$

ii) STRUCTURE: composition and identities

iii) PROPERTIES: strict associativity and interchange axioms.

We have to be a bit more careful about our generalised data: we would like our cells to look like this



Demzufolge stellen also die von Bense als „Primzeichen“ (Bense 1981, S. 17 ff.) eingeführten monadischen Relationen (.1.), (.2.), (.3.), allgemein $x \in (1, 2, 3)$ 0-cells dar. Die bisher bekannten Semiosen der Form $(x \rightarrow y)$ mit $x, y \in (1, 2, 3)$ sind 1-cells (vgl. Bense 1981, S. 124 ff.). Unser neuer Typus von Semiosen der Form $(w.x) \rightarrow (y.z)$ sind somit 2-cells.

2. Rekapitulieren wir an dieser Stelle kurz die Grundlagen der semiotischen Kategorientheorie (Bense 1981, S. 124 ff., Toth 1997, S 21 ff.). Die Morphismen sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= (1 \rightarrow 2) & \alpha^\circ &= (2 \rightarrow 1) \\
 \beta &:= (2 \rightarrow 3) & \beta^\circ &= (3 \rightarrow 2) \\
 \beta\alpha &= (1 \rightarrow 3) & \alpha^\circ\beta^\circ &= (3 \rightarrow 1) \\
 id_1 &= (1 \rightarrow 1) & id_2 &= (2 \rightarrow 2) & id_3 &= (3 \rightarrow 3).
 \end{aligned}$$

Wenn wir nun aber Subzeichen der Form

$$(w.x) \rightarrow (y.z),$$

aufeinander abbilden wollen, dann haben wir zwei Möglichkeiten

1. $w. \quad .x$ 1. .2
 $\downarrow \quad \downarrow$ z.B. $\downarrow \quad \downarrow$ $= [\beta\alpha, \alpha^\circ]$
 $y. \quad .z$ 3. .1
2. $(1.2) \rightarrow (3.1) = (1. \rightarrow .2) \rightarrow (3. \rightarrow .1) = [\alpha, \alpha^\circ\beta^\circ],$

d.h. es ist

$$[\beta\alpha, \alpha^\circ] \neq [\alpha, \alpha^\circ\beta^\circ].$$

Im 1. Falle werden die Subzeichen dadurch abgebildet, daß ihre Primzeichen abgebildet werden, d.h. 1-cells werden wie 0-cells behandelt. Im 2. Falle werden die Subzeichen aber wie 1-cells abgebildet, und ihre Abbildung aufeinander ergibt 2-cells. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten.

2.1. Identitive 2-cell-Morphismen

$$(\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha^\circ \rightarrow \alpha^\circ)$$

$$(\beta \rightarrow \beta)$$

$$(\beta^\circ \rightarrow \beta^\circ)$$

$$(\beta\alpha \rightarrow \beta\alpha)$$

$$(\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ)$$

$$(\text{id}_1 \rightarrow \text{id}_1)$$

$$(\text{id}_2 \rightarrow \text{id}_2)$$

$$(\text{id}_3 \rightarrow \text{id}_3)$$

2.2. Nicht-identitive 2-cell-Morphismen

$$(\alpha \rightarrow \alpha^\circ) \quad (\alpha^\circ \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \quad (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \beta^\circ) \quad (\beta^\circ \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \beta\alpha) \quad (\beta\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \text{id}_1) \quad (\text{id}_1 \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \text{id}_2) \quad (\text{id}_2 \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow \text{id}_3) \quad (\text{id}_3 \rightarrow \alpha)$$

$(\alpha^\circ \rightarrow \beta)$	$(\beta \rightarrow \alpha^\circ)$
$(\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ)$	$(\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ)$
$(\alpha^\circ \rightarrow \beta\alpha)$	$(\beta\alpha \rightarrow \alpha^\circ)$
$(\alpha^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ)$	$(\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ)$
$(\alpha^\circ \rightarrow \text{id}_1)$	$(\text{id}_1 \rightarrow \alpha^\circ)$
$(\alpha^\circ \rightarrow \text{id}_2)$	$(\text{id}_2 \rightarrow \alpha^\circ)$
$(\alpha^\circ \rightarrow \text{id}_3)$	$(\text{id}_3 \rightarrow \alpha^\circ)$

$(\beta \rightarrow \beta^\circ)$	$(\beta^\circ \rightarrow \beta)$
$(\beta \rightarrow \beta\alpha)$	$(\beta\alpha \rightarrow \beta)$
$(\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ)$	$(\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \beta)$
$(\beta \rightarrow \text{id}_1)$	$(\text{id}_1 \rightarrow \beta)$
$(\beta \rightarrow \text{id}_2)$	$(\text{id}_2 \rightarrow \beta)$
$(\beta \rightarrow \text{id}_3)$	$(\text{id}_3 \rightarrow \beta)$

$(\beta^\circ \rightarrow \beta\alpha)$	$(\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ)$
$(\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ)$	$(\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \beta^\circ)$
$(\beta^\circ \rightarrow \text{id}_1)$	$(\text{id}_1 \rightarrow \beta^\circ)$
$(\beta^\circ \rightarrow \text{id}_2)$	$(\text{id}_2 \rightarrow \beta^\circ)$
$(\beta^\circ \rightarrow \text{id}_3)$	$(\text{id}_3 \rightarrow \beta^\circ)$

$(\beta\alpha \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ)$	$(\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \beta\alpha)$
$(\beta\alpha \rightarrow \text{id}_1)$	$(\text{id}_1 \rightarrow \beta\alpha)$
$(\beta\alpha \rightarrow \text{id}_2)$	$(\text{id}_2 \rightarrow \beta\alpha)$
$(\beta\alpha \rightarrow \text{id}_3)$	$(\text{id}_3 \rightarrow \beta\alpha)$

$$(\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \text{id}_1) \quad (\text{id}_1 \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ)$$

$$(\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \text{id}_2) \quad (\text{id}_2 \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ)$$

$$(\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \text{id}_3) \quad (\text{id}_3 \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ)$$

$$(\text{id}_1 \rightarrow \text{id}_2) \quad (\text{id}_2 \rightarrow \text{id}_1)$$

$$(\text{id}_1 \rightarrow \text{id}_3) \quad (\text{id}_3 \rightarrow \text{id}_1)$$

$$(\text{id}_2 \rightarrow \text{id}_3) \quad (\text{id}_3 \rightarrow \text{id}_2).$$

Literatur

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Cheng, Eugenia/Lauda, Aaron, Higher Dimensional Categories. Cambridge, U.K., 2004

Toth, Alfred, Grundlegung einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Benses Schema der Zeichenbezüge. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019a

Toth, Alfred, Graphentheoretische Fundierung der semiotischen Kategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b

Toth, Alfred, Ein neuer Typus von Semiosen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019c

31.5.2019